

XV Международная научно-практическая конференция студентов аспирантов и молодых учёных  
«Молодёжь и современные информационные технологии»

## СИНТЕЗ ФИЛЬТРА КАЛМАНА-БЬЮСИ

Бологов А.А., Сидорова А.А.

Научный руководитель: Сидорова А.А. Томский политехнический университет  
Bologov.andrey.94@mail.ru

### Аннотация

В работе рассмотрен алгоритм фильтра Калмана-Бьюси, позволяющий увеличить точность. Представлена структурная-схемы алгоритма фильтрации. Также проведена серии численных расчетов для различных линейных и нелинейных моделей. Приведены сравнительные характеристики работы алгоритма при различных коэффициентах.

### Введение

В 60-х годах появились работы Р.Калмана и Р.Бьюси, посвящённые проблеме построения линейных оценок вектора состояния динамической системы, описываемой стохастическими дифференциальными уравнениями, со случайной аддитивной добавкой типа стандартного белого шума. Наряду с системой рассматриваются наблюдения, линейно зависящие от вектора фазовых переменных, со случайным шумом. В предположении положительной определённости матриц интенсивностей шумов выведены уравнения оптимального фильтра Калмана-Бьюси.

Новизна подхода Калмана к построению оценки состояния динамических систем при наличии случайных помех заключается в комбинации двух известных идей: динамическая система рассматривается как перемещение в пространстве наблюдений и линейная оценка строится как проекция в гильбертовом пространстве. Метод Калмана-Бьюси учитывает также свойства исследуемой системы путём введения в уравнения фильтра уравнения динамики системы [1].

### Синтез фильтра Калмана-Бьюси

Синтезируем стационарный оптимальный наблюдатель для несингулярной задачи оптимального наблюдения при некоррелированных шуме, возмущающем состояние, и шуме наблюдения, для следующего динамического объекта первого порядка:  $\dot{x}(t) = -a \cdot x(t) + b \cdot u(t) + g(t)$ .

Наблюдаемая переменная определяется выражением  $y(t) = x(t) + p(t)$ .

Здесь через  $g(t)$  обозначен шум, возмущающий состояние, а через  $p(t)$  - шум измерений (белые шумы с постоянными скалярными интенсивностями, соответственно  $V_1$  и  $V_2$ ). Предположим также, что совокупный процесс  $[g(t), p(t)]$  можно описать как белый шум с интенсивностью

$$V(t) = \begin{bmatrix} V_1(t) & V_{12}(t) \\ V_{12}^T(t) & V_2(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$E\left\{\begin{pmatrix} g(t_1) \\ p(t_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^T(t_1) & p^T(t_1) \end{pmatrix}\right\} = V(t_1) \cdot \delta(t_1 - t_2). \quad (2)$$

Здесь  $E$  – символ математического ожидания.

Если все компоненты наблюдаемой переменной возмущаются белым шумом и невозможно извлечь из  $y(t)$  информацию, которая не содержала бы белого шума, то задача восстановления состояния системы называется несингулярной (невыврожденной).

Примем обозначения  $E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0$ ,  $E\{[x(t_0) - \bar{x}_0] \cdot [x(t_0) - \bar{x}_0]^T\} = Q_0$ .

Будем считать, что показателем того, насколько успешно наблюдатель восстанавливает состояние системы в момент времени  $t$ , является среднее значение квадрата ошибки восстановления  $E\{e^T(t) \cdot W \cdot e(t)\}$  с заданной положительно определенной матрицей  $W(t)$ . Средняя квадратическая ошибка восстановления зависит от выбора  $\hat{x}(t_0)$  и матрицы наблюдающего устройства  $K(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Задача оптимального выбора этих величин называется задачей оптимального наблюдения.

Задача в такой постановке впервые была решена Калманом и Бьюси. Ее решение получается путем выбора матрицы коэффициентов усиления:

$$K^0(t) = Q(t) \cdot C^T(t) \cdot V_2^{-1}(t), t \geq t_0 \quad (3)$$

где  $Q(t)$  – решение матричного уравнения Риккати [2].

$$\dot{Q}(t) = V_1(t) - Q(t) \cdot C^T(t) \cdot V_2^{-1}(t) \cdot C(t) \cdot Q(t) + Q(t) \cdot A^T(t) + A(t) \cdot Q(t) \quad (4)$$

с начальным условием  $Q(t_0) = Q_0$ . Начальное условие для наблюдателя должно быть выбрано в виде  $\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0$ .

Если удовлетворяются соотношения (3 и 4), то выражение  $E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T \cdot W(t) \cdot [x(t) - \hat{x}(t)]\}$  минимизируется при всех  $t \geq t_0$ . Матрица дисперсий ошибки восстановления определяется выражением  $E\{[x(t) - \hat{x}(t)] \cdot [x(t) - \hat{x}(t)]^T\} = Q(t)$ , а среднее значение квадрата ошибки восстановления равно  $E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T \cdot W(t) \cdot [x(t) - \hat{x}(t)]\} = \text{tr}[Q(t) \cdot W(t)]$ . Отметим, что решение задачи оптимального наблюдения не зависит от весовой матрицы  $W(t)$ .

Полученный оптимальный наблюдатель известен как фильтр Калмана-Бьюси. Этот фильтр является линейным оценщиком с минимальным средним значением квадрата ошибки, т.е. нельзя найти другой линейный функционал наблюдений  $y(t)$  и входного воздействия  $u(t)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ , который дает оценку состояния  $\hat{x}(t)$  с меньшей квадратической ошибкой восстановления.

Как видно, матрица коэффициентов усиления фильтра  $K^0(t)$  нестационарна. Ее можно получить, решая матричное уравнение Риккати (4) в реальном масштабе времени и используя выражение (3).

При нежестких ограничениях решение  $Q(t)$  уравнения Риккати (4) для наблюдателя сходится к установившемуся решению  $\bar{Q}(t)$ , которое не зависит от  $Q_0$ , когда начальный момент времени  $t_0$  приближается к бесконечности. Для системы с постоянными параметрами и постоянными плотностями шумов датчиков и шумов, возмущающих состояние, установившееся решение  $\bar{Q}$  также является постоянной матрицей и, в общем случае, представляет собой единственное неотрицательно определенное решение алгебраического уравнения Риккати для наблюдателя:

$$0 = A \cdot Q + Q \cdot A^T + V_1 - Q \cdot C^T \cdot V_2^{-1} \cdot C \cdot Q \quad (5)$$

Это уравнение получается из уравнения (4), если принять производную по времени  $\dot{Q}(t)$  равной нулю. Соответственно, установившаяся матрица коэффициентов усиления оптимального наблюдателя может быть записана в виде

$$\bar{K} = \bar{Q} \cdot C^T \cdot V_2^{-1} \quad (6)$$

Полученный стационарный оптимальный наблюдатель с постоянной матрицей коэффициентов усиления  $\bar{K}$  является асимптотически устойчивым. В системе с постоянными параметрами он оптимален в том смысле, что предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{e^T(t) \cdot W \cdot e(t)\}$  достигает минимума в сравнении со всеми другими наблюдателями с постоянными параметрами. Оптимальный наблюдатель обеспечивает компромисс между скоростью восстановления и устойчивостью к шуму наблюдений.

Рассчитаем установившейся оптимальный наблюдатель для этой системы. Для этого решим алгебраическое уравнение Риккати:

$$-\frac{1}{V_2} Q^2 - 2 \cdot a \cdot Q + V_1^2 = 0 \quad (7)$$

Получим  $\bar{Q}_{1,2} = [-a \pm \sqrt{a^2 + V_1^2/V_2}] \cdot V_2$ . Отсюда следуют два варианта для установившегося коэффициента усиления наблюдателя:

$$\bar{K}_1 = \bar{Q}_1 \cdot C^T \cdot V_2^{-1}, \quad \bar{K}_2 = \bar{Q}_2 \cdot C^T \cdot V_2^{-1}. \quad (8)$$

Приняв значения  $a = 0.5, V_1 = 1, V_2 = 1.5$  и учитывая, что  $\bar{K} \geq 0$ , получим  $\bar{K} = 0.457$ . Структурная схема объекта с наблюдателем представлена на рисунке 1, а схема моделирования - рисунке 2 [3, 4].

На рисунках 3 и 4 представлены графики выходных величин.

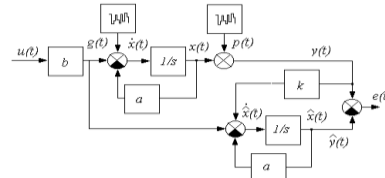


Рис. 1. Структурная схема объекта со стационарным оптимальным наблюдателем

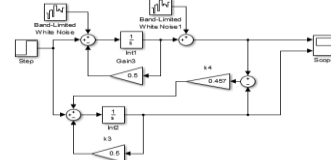


Рис. 2. Схема моделирования объекта с фильтром Калмана-Бьюси

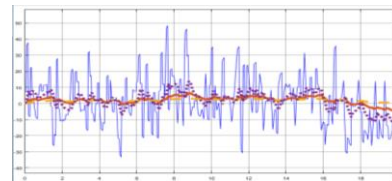


Рис. 3. Выходные характеристики (линия - выход фильтра при  $K=0.457$ , пунктир - выход фильтра при  $K=2$ , штрих - выход фильтра при  $K=0.1$ )

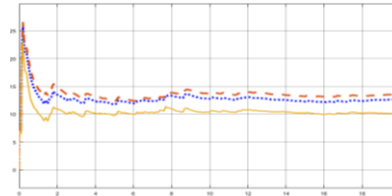


Рис. 4. Среднеквадратичная ошибка (линия - при  $K=0.457$ , пунктир - при  $K=2$ , штрих - при  $K=0.1$ )

### Заключение

В ходе выполнения работы был сделан анализ свойств фильтра Калмана-Бьюси в рамках несингулярной задачи оптимального наблюдения при некоррелированных шумах. В результате фильтрации сигнала объекта. При применении фильтра Калмана-Бьюси мы можем избавиться от биения в системе, которая негативно влияет на надежность системы, чем меньше коэффициент  $K$ , тем лучше происходит сглаживание сигнала. При рассчитанном коэффициенте  $K$  имеем самую маленькую среднеквадратичную ошибку.

### Литература

1. Фильтр Калмана-Бьюси. [Электронный ресурс]. Режим доступа: свободный. Ссылка на ресурс: <https://ru.wikipedia.org/wiki/ФильтрКалмана>
2. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
3. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002. – 528 с.
4. Теория автоматического управления Ч. II Под ред. А.В.Нетушила – М.: Высшая школа, 1972. – 43